

Vízfelszíni sokszögörvények laboratóriumi vizsgálata

Tudományos Diákköri Dolgozat

Készítette:

Kadlecsik Ádám

Fizika BSc I.

Témavezető:

Vincze Miklós

tudományos főmunkatárs,
MTA-ELTE Elméleti Fizikai Kutatócsoport

ELTE TTK
Fizikai Intézet
Kármán Környezeti Áramlások Laboratórium
2020

Kivonat

Ismert jelenség, hogy egy folyadékkal feltöltött hengeres falú edény szimmetriatengelye körüli gyors forgatásakor a folyadékfelszín paraboloid alakot vesz fel. Kevésbé triviális probléma azonban, hogy mi történik akkor, ha az edénynek csak az alsó, vízszintes peremét forgatjuk, míg a függőleges hengerpalást nyugalomban marad. A tapadási peremfeltétel miatt a forgó aljzaton illetve a fal közelében lévő folyadékelemek között nyírás ébred, ami egy mindedig kevésbé értett nyírás instabilitás-jelenséghez vezet. Az instabilitás eredményeként bizonyos forgatási körfrekvenciáknál közel szabályos, sokszögörvénynek (polygon vortex) nevezett hullámalakzatok jelennek meg az aljzat és a folyadék kontaktvonal mentén. Kutatómunkánkban ezeket a sokszögeket, azok hullámszámát és körbehataladási ütemét befolyásoló paramétereknek feltárását tűztük ki célul, illetve félempirikus összefüggések felállítását a megfigyelt jelenségek magyarázatára.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés és motiváció	2
1.1. „Newton-vödör”	3
2. A jelenség reprodukálása	5
2.1. A mérési eszköz	5
2.2. A jelenség előállítása	7
2.3. A jelenség leírása	8
3. A jelenség kvalitatív magyarázata	9
3.1. Instabilitások	9
4. Releváns paraméterek vizsgálata	11
5. Kvantitatív elmélet	12
5.1. Vízfelszíni hullámok	13
6. További érdekes jelenségek, megközelítések	15
6.1. Falak forgatása	15
6.2. Áramlások felbontása	15
6.3. A jelenség energetikai vizsgálata	16
6.4. Vacillációk	17
7. Összefoglalás	17

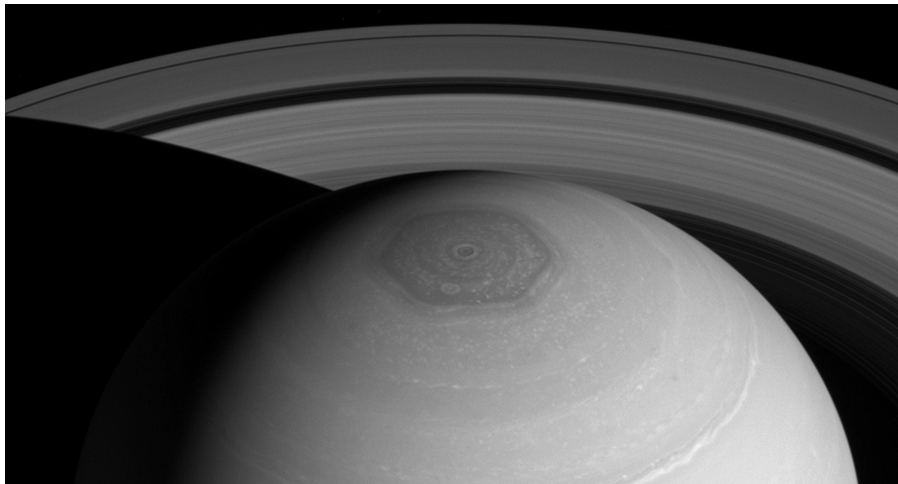
1. Bevezetés és motiváció

Egy 2006-os kísérleti szakcikkkben Thomas Jansson és munkatársai megmutatták, hogy egy álló, rögzített falú, de szimmetriatengelye körül gyorsan forgó aljzatú hengeres edénybe töltött folyadék az alsó forgatás és a falakhoz tapadás különös összjátékaként szabályos, „sokszöges”, örvényszerű alakzatokba rendeződhet, ha az aljzati korong forgásának körfrekvenciáját és a folyadék feltöltési szintjét megfelelően választják meg [1].

Bár az ilyen vízfelszíni sokszögörvények megjelenését azóta számos tanulmány vizsgálta [2, 3, 4, 5], a jelenség dinamikája mégsem tekinthető tisztázottnak. A szakirodalomban egymásnak ellentmondó állításokkal is találkozhatunk (pl. egyes paraméterek hatásával kapcsolatban), s általában: az általunk megismert művek nem adnak egyértelmű magyarázatot olyan alapvető kérdésekre, mint például, hogy hogyan jósolható a megfigyelt alakzatok körbehataladási sebessége. Ennek oka a probléma komplexitása, hiszen a jelenséget számtalan irányból lehet megközelíteni, illetve szoros kapcsolatban áll más, ugyancsak kutatott és bonyolult jelenségekkel.

Hasonló sokszögörvények a természetben is előfordulnak, bár más nagyságrendekben: a Szaturnusz északi sarkvidékénél a Voyager-2 űrszonda egy hatszög alakú áramlási rendszert fedezett fel (1. ábra), illetve a Földön is találkozhatunk sokszöges felhőalakzatokkal [6]. Ugyanakkor ezeknek az okai kissé különböznek – illetve máig vitatottak. Míg a bolygó méretű jelenségek-nél nagyobb szerepet kapnak a hőmérséklet- és sűrűségkülönbségek, illetve a bolygó görbülete, a laboratóriumban előállítható sokszögörvényeket csupán a rendszerbeli sebességkülönbségek hozzák létre. Ugyanakkor valószínűsíthető, hogy a Szaturnusz esetében a hőmérséklet- és sűrűségkülönbségek és a bolygó görbülete és forgása okozza a sebességkülönbségeket, s végül itt is a zonális sebességkülönbség (nyírás) vezet a hatszög kifejlődéséhez. Ebből látható, milyen szoros kapcsolatban állhat két, nagyságrendekben különböző méretű jelenség. Mindebből arra következtethetünk, hogy sokszögörvények laboratóriumi vizsgálata talán segítséget nyújthat akár bolygóléptékű problémák feltárásához.

Kutatásainkat a témában a 2020-as IYPT (International Young Physicists' Tournament) nemzetközi fizikaversenyre való felkészülés keretében kezdtük meg, melyen a szerző bemutat-hatta a sokszögörvényekkel kapcsolatos eredményeit, a TDK témavezetője pedig felkészítőként segítette a munkát. A dolgozat az IYPT-eredmények feldolgozásából és kibővítéséből született.



1. ábra. Kép a Szaturnusz északi sarkánál lévő hatszögéről. Átmérője kb. 29000 km. (Forrás: NASA)

1.1. „Newton-vödör”

Sokszögörvényekhez hasonló jelenségeket már számtalanszor vizsgáltak. A legegyszerűbb talán az angolul „Newton’s bucket”-ként ismert kísérlet (a magyar tankönyvekben legtöbbször egyszerűen csak mint „forgatott folyadék” szerepel, ld. pl.: [7]), mely során egy vízzel töltött hengeres edényt szimmetriatengelye körül forgatunk. Maga Isaac Newton ezt elsősorban a centrifugális erő hatásának bemutatására használta, melyről a *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*-ban ír részletesebben. Ebben a rendszerben a felszíni vírzészecskékre két erő hat: a gravitációs, illetve a közelében lévő más részecskék nyomóereje. Külső inerciarendszerből szemlélve a két erő eredője a befelé mutató centripetális erő, együttmozgó koordinátarendszerben pedig a kifelé mutató centrifugális erő. Ezeket figyelembe véve a következőt kapjuk a vízfelszín alakjára:

$$z = z_0 + \frac{\omega^2 r^2}{2g}. \quad (1)$$

Látható, hogy olyan forgásparaboloid alakot vesz fel, melyben z a függőleges tengely, z_0 a parabola legalsó pontja, ami pont a szimmetriatengelyen van, ω a forgatás szögsebessége, r a tengelytől mért radiális távolság és g a gravitációs gyorsulás. z_0 -ra a következő formulát kapjuk:

$$z_0 = H_0 - \frac{\omega^2 R^2}{4g}, \quad (2)$$

ahol H_0 a víz nyugalmi magassága, azaz amikor nem forgatjuk az edényt és R az edény sugara. Ahhoz, hogy $z_0 \leq 0$ legyen, azaz az edény közepe száraz legyen, a következő relációnak kell igaznak lennie:

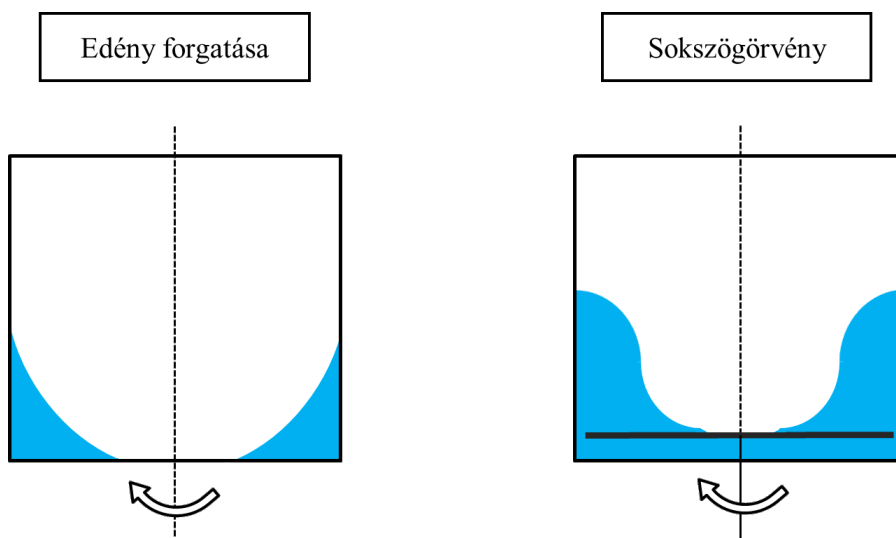
$$\omega(z_0 \leq 0) \geq \frac{2}{R} \sqrt{gH_0}. \quad (3)$$

Azért fontos ez az eset, mert sokszögörvényeket sokkal egyértelműbben lehet észlelni akkor, ha a víznek a száraz résszel egy jól látható pereme van.

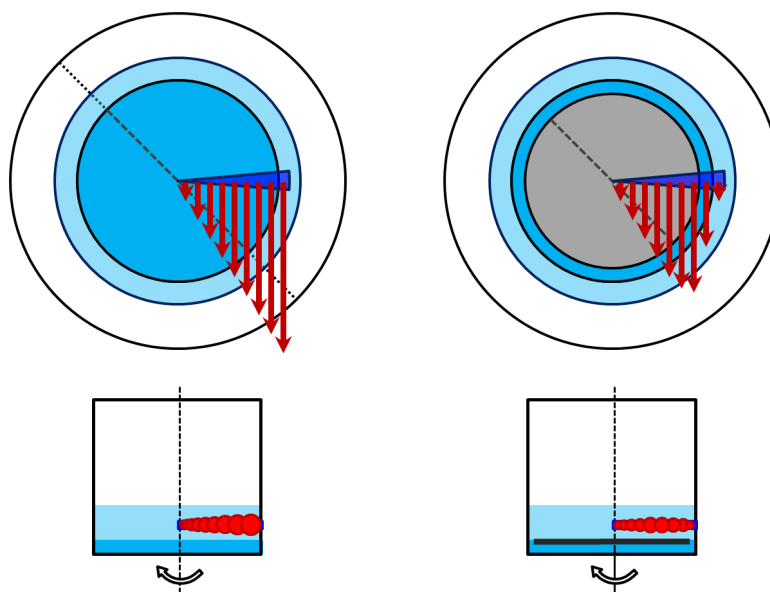
A különbség a „Newton-vödör” és a sokszögörvény-kísérlet elrendezése között az, hogy míg az előző esetében az egész edény forog, utóbbinál csak az edény aljába helyezett tányér – gyakorlatilag az edény alja – forog. Ezt szemléltetjük a 2. ábrán. Egy ilyen kis különbség döntő fontosságú változásokat okoz az edényben. Többek között megváltozik a víztömeg alakja. A parabola az edény falához közeledve lekonyul, és közel vízszintesen érintkezik a fallal. Ennek oka, hogy míg a víz az edény közepénél forogna, az edény szélénél a víz egy helyben maradna, az álló falakkal való súrlódása miatt. Vizsgáljuk ezt meg közelebbről!

Nézzünk az edényekbe felülről! A 3. szemléltető ábrán látjuk, milyen különbséget okoz a fal stacionaritása. A „Newton’s bucket” esetében az edényben egyre kijjebb haladva az áramlás sebessége $U(r)$ egyenesen arányosan nő. Ezzel szemben a sokszögörvény esetében az edény közepénél hasonló mód nő a sebesség, viszont közel a falhoz az lecsökken, hiszen tapasztalat, hogy szilárd fallal érintkező folyadék sebessége közvetlenül a falnál megegyezik a fal sebességével. Ábrázoljuk ezt a jelenséget grafikonon. Látható a 4. ábrán, hogyan változik a folyadék tangenciális sebessége r függvényében. Külső inerciarendszerből figyelve az edény falánál a folyadék sebessége kicsi. Ugyanakkor együttforgó koordinátarendszerben a folyadék sebességének a nagysága egy jól látható ugráson megy át. Ez egy nagy sebességkülönbséggel rendelkező vízréteget eredményez, melyet jelezünk δ -val. Ennek több következménye van: egyrészt a meg-növekedett sebesség Bernoulli-effektust eredményez, másrészt nyírési instabilitáshoz vezet (3.1. alfejezet).

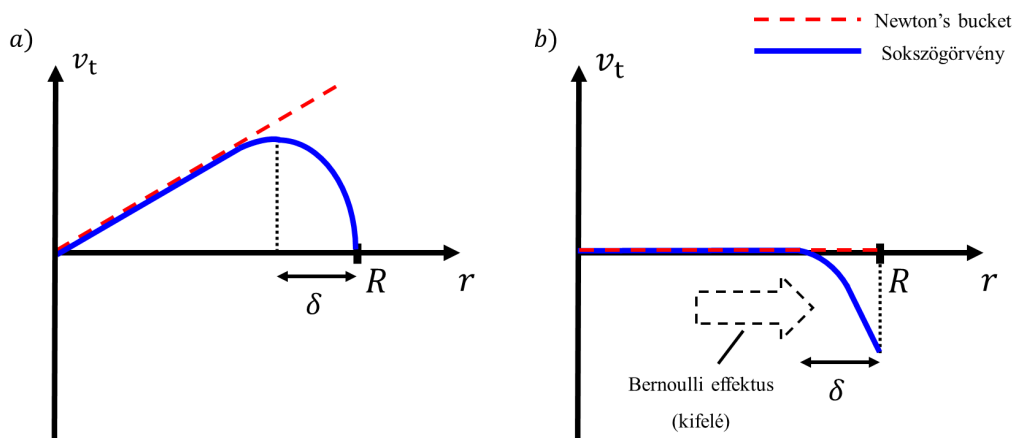
Ez a δ határréteg lesz felelős a sokszögörvények kialakulásában. A 3. fejezetben részletesen írunk a jelenség további okairól, kialakulásáról, jellemzőiről.



2. ábra. A különbség a „Newton’s bucket” és a sokszögörvény előállítás között az, hogy míg az első esetben az egész edényt forgatjuk, addig sokszögörvényeknél csak az edény aljába elhelyezett tányér, azaz gyakorlatilag az edény alja forog. Így míg a folyadék az edény aljában forgásra van kényszerítve, a stacionárius falak mentén a folyadék helyben maradna.



3. ábra. Sematikus ábra a sokszögörvényben keletkező nyírásokról (külső vonatkoztatási rendszerben). Bal oldalon egy edénynek a forgatását látjuk, ahol ahogy egyre kijebb megyünk, nő a folyadék tangenciális sebessége. Jobb oldalon csak az alsó tányér forog, így ahogy közel érünk a falhoz, lelassul a folyadék a fallal való súrlódás miatt. Ez a különbség a két elrendezés között okozza azt, hogy utóbbi esetben sokkal komplexebb formákat láthatunk.



4. ábra. A folyadék tangenciális sebessége az edényekben, r függvényében. *a)* Külső inerciarendszerből figyelve. *b)* Belső gyorsuló koordináta-rendszerből figyelve. Míg *a)* esetben egy edény forgatásakor a sebesség lineárisan nő, a mi esetünkben közel a falhoz csökken. Nevezzük el ezt a lelassult vízréteget δ -nak. Ha *b)* szerint ábrázoljuk a sebességet, azt láthatjuk, hogy közel a falhoz δ sebessége hirtelen megváltozik. Emiatt a Bernoulli-effektus lép fel, mely egy kifelé ható nyomás formájában jelenik meg. Többek között ez okozhatja a sokszögörvényeket.

2. A jelenség reprodukálása

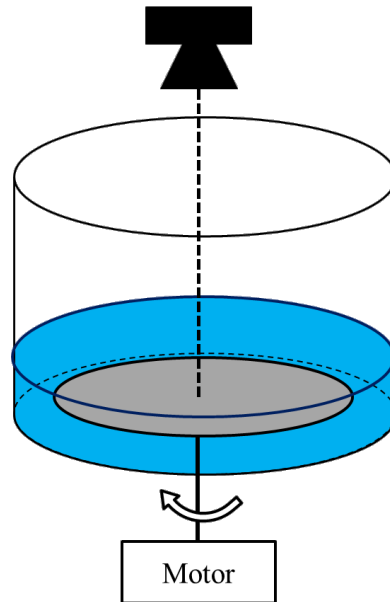
Egy működő mérési műszer elkészítése korántsem olyan triviális, mint a „Newton’s bucket” jelenségnél. Míg abban az esetben egy egyszerű vödörrel reprodukálható a jelenség, itt igazi kihívásnak számított az eszköz elkészítése. A mérési eszközünk megépítése közben figyelembe vettük más kutatások módszereit. A leggyakrabban használt megoldást választottuk, de bemutatunk más lehetséges mérési elrendezéseket is.

2.1. A mérési eszköz

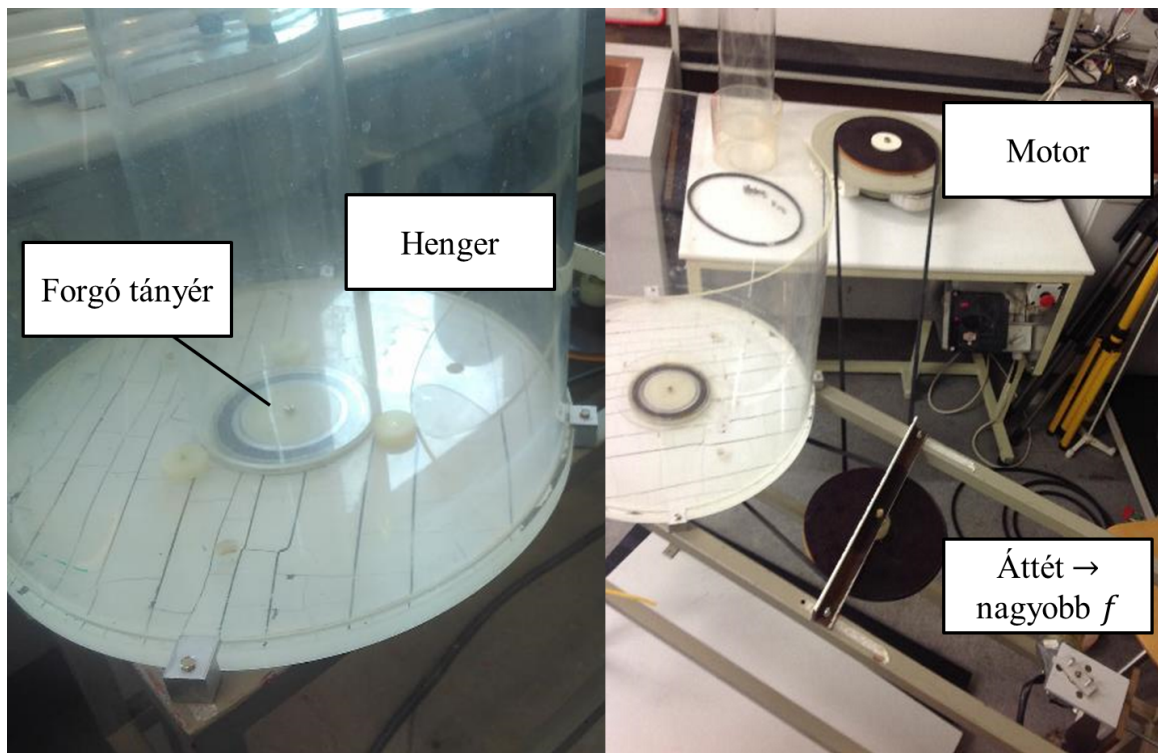
A jelenség kivitelezéséhez szükségünk lesz egy hengeres edényre (5. ábra). Az edény aljához közel helyezünk el egy hajtható, az edénytől független forgásra képes tányért. Ezt kétféle módon tehetjük: vagy felülről lógatjuk be, vagy alulról, egy vízálló csapágy segítségével tartjuk. Mi a második típust használjuk, mivel a felülről belógatott tengely instabillá válhat és perturbálható, továbbá ez esetben nem tudnánk a henger közepe fölé kamerát helyezni. Elképzelhető egy harmadik konstrukció is, amelynél nincs szükség tengelyre. Ekkor mágneseket helyezhetünk a tányér aljára, és az edény alatt pedig egy motor forgatna egy mágnesekkel ellátott tányért, ami forgásra bírná a hengerben lévő lemezt. Ennek a megvalósításnak viszont több hátulütője is van. Egyrészt nem lehetne a tányért hirtelen gyorsítani és lassítani, hiszen a mágnespárok elmozdulnának egymástól. Továbbá valószínű, hogy egy rögzítettlen forgó tányér szitálna a hengerben, mérési hibákat eredményezve. Így mi egy alulról tartott tengelyt használtunk.

A 6. ábrán látható a mérési elrendezésünk. Motornak egy forgóasztalt használtunk. Bár a motor teljesítménye elegendően nagy volt, a fordulatszáma alacsonynak bizonyult, így áttétekkel növeltük azt. Későbbiekben kiderült, hogy érdekesebb lett volna áttétek helyett fogaskerekeket alkalmazni, ugyanis az áttét kifeszítése problémásnak bizonyult, illetve ha sikerült is kellően kifeszíteni, a tengely körül erős súrlódás lépett fel, ami megnehezítette a motor munkáját. Sajnos ezt a későbbiekben nem állt módunkban kijavítani. A képen látható továbbá maga az edény. Egy vízszintes aljzatból áll, melyre különböző méretű hengereket tudunk erősíteni, így változtatható az edény átmérője. A forgó tányért egy csavarral erősítjük a forgó vízálló csapágyhoz, így ennek is változtatható a mérete. (A csavar feje kellően kicsi volt ahhoz, hogy ne

befolyásolja a jelenséget, továbbá sokszögörvényeknél a tányér közepe száraz, így a víz nem tud érintkezni a csavarral.) Érdekes eset, amikor nem ugyanakkora tányért és hengert használtunk, mégis kialakul a jelenség. Megfontolandó lehet továbbá nem kör alakú tányérokkal kísérletezni, hanem más, pl. sokszög alakúakkal próbálkozni. Valószínűleg a jelenség ezen esetekben is előfordul, más kezdőfeltételekkel.



5. ábra. Sematikus ábra az edényről.



6. ábra. A mérési elrendezés. Mivel a forgó asztal alacsony frekvenciával volt képes forogni, áttéteket használtunk annak megnöveléséhez.

Hengerátmérők (D)
7.5 cm
14 cm
17 cm
27 cm
44.5 cm

1. táblázat. Táblázat a méréseinkhez használt hengerátmérőkről. Legtöbbször az edény alján forgó tányér mérete egyezett a henger méretével, de egyes mérések kisebb forgó tányérral készültek. A jelenség ilyen esetekben is előállhat.

2.2. A jelenség előállítása

A továbbiakban általánosan írunk a jelenségről; hogyan lehet előidézni, illetve milyen kezdőfeltételekkel érdemes próbálkozni. Ezeket a jellemzőket empirikus módon, a mérési műszer használata közben nyert tapasztalatainkkal határozzuk meg. A dolgozat további fejezeteiben lesz szó az ezen döntések mögötti elméletről.

Ahhoz, hogy létrehozzuk ezeket a sokszögeket, természetesen folyadékra lesz szükségünk az edényben. Mi a méréseink során vizet használtunk, azonban más viszkozitású anyagokkal is reprodukálható a jelenség. A henger nagysága legyen lehetőleg nagy, mert ~ 12 cm-nél kisebb átmérőjű hengerben – bár előidézhető – nehéz a jelenséget egyértelműen kimutatni. A legnagyobb hengerátmérő, amivel mi mértünk $D = 44.5$ cm volt. A kísérleteinkben használt hengerátmérőket az 1. táblázatban foglaltuk össze.

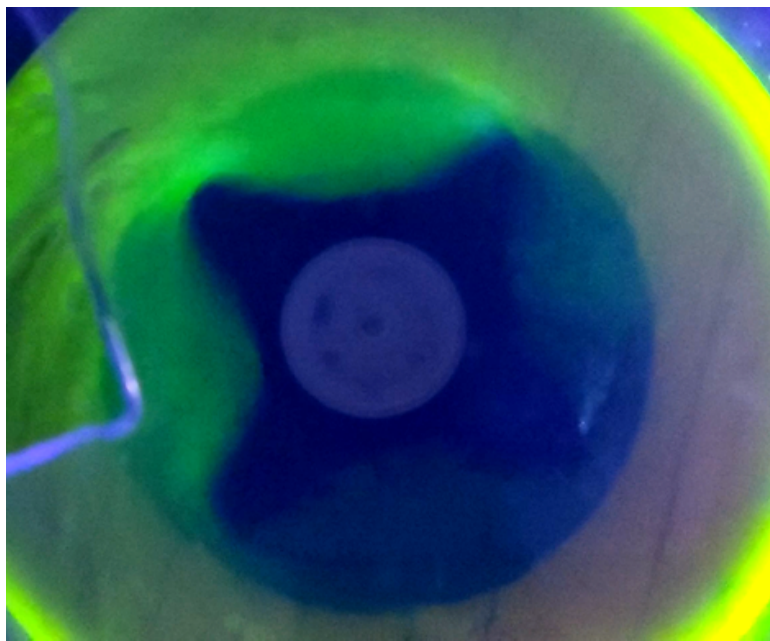
A víz nyugalmi magassága – azaz az a magasság, amikor még nem forgatjuk a tányért – függhet a henger méretétől, de általában azt mondhatjuk, hogy legyen ~ 6 cm. Próbálkozhatunk nagyobb vízmagasságokkal is, viszont túl sok víz meghajtására csak erős motorok képesek. Ez a probléma előállhat nagy átmérőjű hengereknél, hiszen azokban hamar megnőhet a folyadék össz tömege, ahogy töltjük.

A mérés szempontjából a legfontosabb paraméter maga a frekvencia, amivel forgatjuk a tányért. Ezzel a paraméterrel nagyon egyszerűen lehet változtatni a sokszögszámot. Általánosságban elmondható, hogy nagyobb frekvencia nagyobb sokszögszámhoz vezet. Egyes beállításkor már $2 - 3$ Hz-nél is előfordulhat a jelenség, ellipszisek formájában. Ahogy növeljük a frekvenciát, úgy ugorhat feljebb a sokszögszám. Az egyes paraméterek pontos hatásáról a 4. fejezetben írunk részletesen.

2.3. A jelenség leírása

Kutatásunk során összesen több, mint 300 sokszöget hoztunk létre, különböző paraméterekkel. A továbbiakban általánosságban írunk róluk és jellegzetességeikről.

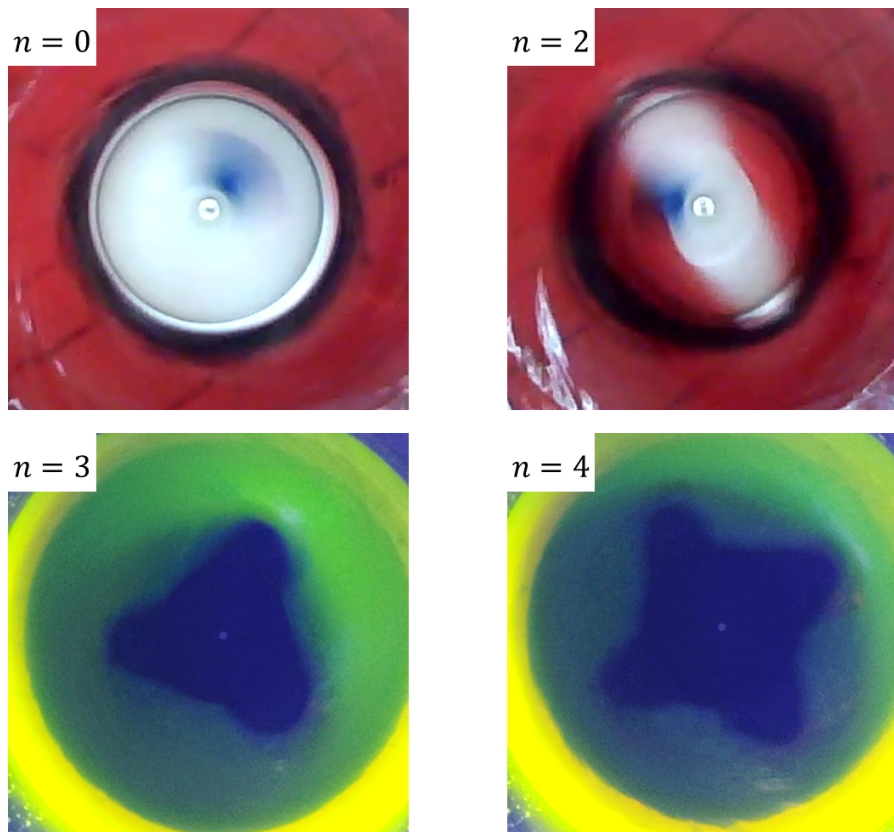
Az alsó tányér forgatásának megkezdésével turbulens áramlások keletkeznek, ahogy a folyadékra ható erők felszorítják azt a falra. Az edény közepénél a víz magassága gyorsan lecsökken, és a falnál megnő. Ha elég nagy sebességgel forgatjuk, az edény közepe száraz lesz. A jelenség nedves középpel is előfordul, de sokkal látványosabb, amikor száraz a tányér közepe. Kis idő elteltével a folyadék stabilan örvénylik a tartályban, míg egyszer csak (általában 2 percen belül) spontán szimmetriasértésen megy keresztül, és néhány másodperces átmeneti időszak után kialakul egy új stabil állapot, ahol a víz felszíne olyan formát vesz fel, hogy a tányér száraz felülete sokszögformájú. A 7. ábrán látható egy példa erre. Jól kivehető a száraz felület négyszögformája.



7. ábra. Példa a jelenségre. A képen egy négyszöget láthatunk. A vizet UV-ben fluoreszkáló szemcsékkel vegyítettük. Jelen esetben forgó tányérnak egy bakelit lemezt használtunk, mely jóval kisebb volt a henger nagyságánál, mégis szépen előáll a jelenség.

Ez az alakzat forog, mind az inerciarendszerben, mind a tányérral együttforgó koordináta-rendszerben. Kívülről figyelve körülbelül a tányér frekvenciájának a harmadával forog, de ez beállításonként és sokszögenként különbözik.

Hasonló módon alakulnak ki más sokszögszámok is. Mi négyszögek mellett ellipsziseket és háromszögeket tudtunk előállítani, de más kutatásokban észleltek már ötszöget, sőt hatszöget is. Hétszögről feljegyzést nem találtunk. Elméletileg nem kellene a szögszámnak felső korlátjának lennie. Valószínűleg egy hétszög előállításához már egy jóval nagyobb és erősebb berendezésre lenne szükség. De az sem kizárható, hogy túl nagy rendszerekben a sokszögörvények kialakulása nem tud végbe menni. A 8. ábrán láthatóak a mi általunk előállított formák: kör, ellipszis, háromszög és négyszög. A továbbiakban az egyes sokszögekre a rájuk jellemző n számmal fogunk utalni.



8. ábra. Az általunk észlelt formák. Az egyes n számok a sokszögek szögszámára utal. $n = 1$ nem szerepel, mivel míg kétszögnek tekinthetjük az ellipszis formát, egyszög gyakorlatilag a kör.

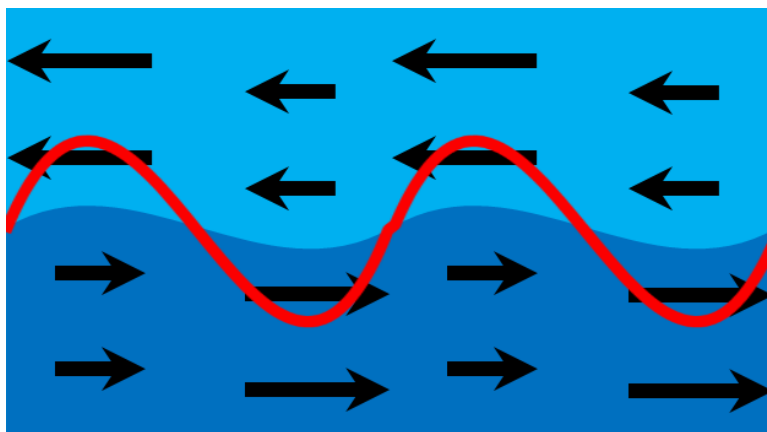
3. A jelenség kvalitatív magyarázata

Talán a legnehezebb feladat a jelenség okának a magyarázata. Mint látjuk, a sokszögörvények csak nagyon specifikus esetekben állnak elő, és a jelenség érzékeny a kezdőfeltételekre. A legtöbb cikk a témában – amelyeket mi olvastunk – erre a kérdésre nem adott egyértelmű, teljes választ [1, 4]. A következőkben mi egy kvalitatív magyarázattal fogunk szolgálni, melyhez egy kis kitérőt kell tennünk az áramlástani instabilitások világába.

3.1. Instabilitások

Tekintsünk két egymás felett elhelyezkedő, nem azonos sűrűségű folyadékra teget, melyek ΔU relatív sebességkülönbsége nem nulla. Tegyük fel, hogy az alsó közeg sűrűbb, valamint hogy a két közeget elválasztó határfelület kezdetben sík. Vizsgáljuk meg, hogy e felület kis, tetszőleges hullámhosszú deformáció hatására visszatér-e kezdőállapotába. Amennyiben létezik olyan λ hullámhosszú perturbáció, melynél a határfelület nem tér vissza eredeti állapotába, akkor e síkot instabillnak nevezzük. Ez a *Kelvin-Helmholtz-(KH)-instabilitás*. Az instabillá vált határfelület egyre nagyobb amplitúdójú kitéréseket mutat, majd linearitását elveszítve, érdekes mintázatokba gyűrődik be (9. ábra).

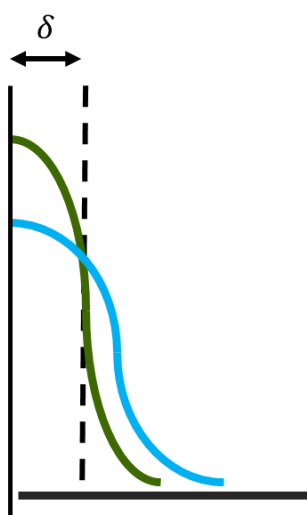
A Kelvin-Helmholtz instabilitás azonban csak egy formája a nyírési instabilitások kiterjedt családjának. Hasonló, de nem azonos jelenséget láthatunk a sokszögörvények esetében. Különbőség, hogy itt az áramlás két tartományát, amelyek között ΔU sebességkülönbség ébred, nem különböző sűrűségű rétegek jelölik ki, hanem a fallal való súrlódás miatt megjelenő határréteg δ vastagsága. Továbbá a mi esetünkben az áramlás önmagába örvénylik, azaz periodikus.



9. ábra. Ábra az instabilitásról. A világoskék folyadékréteg a sötétkék folyadékrétegen áramlik. A fekete nyilak hosszúsága az áramlás nagyságát reprezentálja az egyes szakaszokon.

Az instabilitás mechanizmusának kvalitatív megértéséhez tekintsünk a 9. ábrára, mely a két elkülönülő réteg (világos- és sötétkék) sebességmezőjének (fekete nyilak) vázlatát mutatja. Látható, hogy a két tartomány határfelületének kicsiny térbeli perturbációi azt eredményezik, hogy – a folyadék összenyomhatatlanságából következően – a lokálisan megvastagodó rétegben a sebesség lecsökken, míg az elvékonyodóban megnövekszik. A Bernoulli-hatás következtében azonban ez a folyamat *instabil*, vagyis az elvékonyodó tartományok még vékonyabbá, a vastagodók még vastagabbá válnak. Így a kezdeti periodikus perturbációk megnövekednek.

Mivel az általunk vizsgált elrendezésben a vízfelszín szabad, az instabilitás nem csupán a határfelület faltól való távolságának vízszintes megváltozásában, hanem a határrétegbeli vízszint magasságának oszcillációjában is megjelenik (10. ábra). Feladatunk a továbbiakban annak felderítése volt, hogy mi határozza meg az alakzatok hullámszámának, a korong forgatási körfrekvenciájának és a víztest méreteinek kapcsolatát.



10. ábra. Szemléltetés az oszcillációról. A kezdeti állapotot a kék vonal jelöli. Ekkor a forgatás közben megjelenő centrifugális erő hatása, illetve a kifelé ható Bernoulli hatás miatt, a folyadék felgyülemlik közelebb a falhoz. Ott viszont a megnövekedett magasság miatt a nagyobb potenciális energiájával vissza térne eredeti állapotába. Így kialakul egy oszcilláció. Többek között ezzel az effektussal is magyarázható a sokszögörvények létrejötte.

Mennyiség	Jelölése
Henger átmérője	R
Tányér átmérője	R_t
Víz nyugalmi magassága	H_0
Forgatás frekvenciája	f
Folyadék sűrűsége	ρ
Kinematikus viszkozitás	ν
Víz mélysége a tányér alatt	-

2. táblázat. Táblázat a releváns paraméterekről és jelölésükről. A kérdés, hogy a víz mélysége a tányér alatt releváns paraméter-e, csak további vizsgálatok után megválaszolható. Az kijelenthető, hogy hatása függ attól, hogy kicsi-e a tányér mérete a hengerhez képest. Tehát, ha a tányér közel akkora, mint a henger, elhanyagolható paraméternek tekinthető.

4. Releváns paraméterek vizsgálata

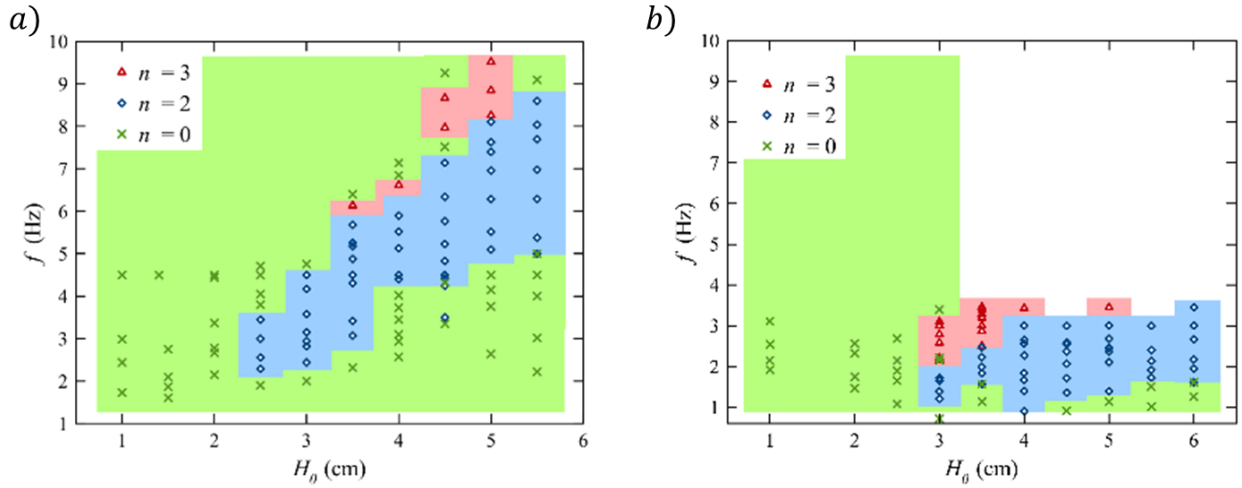
Fontos része kutatásunknak a releváns paraméterek vizsgálata. Éppen ezért építettünk olyan mérési eszközt, melyben a lehető legtöbb paraméter változtatható legyen. A 2. táblázatban felsoroltuk a releváns paramétereket. Ezek közül mi változtattuk a henger átmérőjét, a tányér átmérőjét, a víz nyugalmi magasságát és a forgási frekvenciát. A folyadék sűrűsége és viszkozitása összes mérésünkben azonos volt, vizet használtunk. A jelenség bizonyára más tulajdonságú folyadékoknál is előáll. A viszkozitás elméletünk szerint a δ határrétegnek a vastagságát változtatná elsősorban. Ez azt jelenti, hogy nagyobb viszkozitású folyadéknál közelebb lenne a nyírás határvonala, így a sokszögörvény beljebb, azaz kisebb átmérővel jelenne meg. Érdekes kérdés, hogy a víz mélysége a tányér alatt releváns paraméter-e. Feltesszük, hogy amikor a tányér átmérője szinte egyenlő a henger belső átmérőjével, ez elhanyagolható. Ugyanakkor ha a tányér sokkal kisebb, mint maga a henger, akkor elképzelhető, hogy fontos szerepet játszhat. Képzeljük el azt a felállást, hogy a henger közepében forog a tányér, mely alatt és felett víz helyezkedik el. Így olyan függőleges áramlások születhetnek a víz felső és alsó része között, melyek erősen befolyásolhatják a vízfelület formáját. Ebből az okból kifolyólag méréseink során a víz mélységét a tányér alatt a lehető legkisebbre vettük: < 1 cm.

Méréseink egy részét a 11. ábrán prezentáljuk. Ezen a fázisdiagramon látható, hogy az egyes beállításoknál milyen sokszöget észleltünk. Hasonló fázisdiagramot más cikkekben is mértek ([1, 3]). Ezen fázisdiagramoknak igen jellegzetes és hasonló alakjuk van.

Először is hasonlítsuk össze a két diagramot. 11.b) diagram nagyobb edénymérettel készült, mint 11.a). Látható, hogy b)-nél „hamarabb”, azaz alacsonyabb frekvenciáknál állítható elő a jelenség. Ennek oka, hogy nagyobb a nyírás határrétege, így több hullámhossz könnyebben „fér” el. Tehát nagyobb edényekkel nagyobb szögszámú sokszögeket érhetünk el.

A továbbiakban vizsgáljuk a) grafikont. Az x tengelyen a kezdeti vízmagasság, az y tengelyen a forgási frekvencia szerepel. Látható, hogy a sokszögek alacsony vízmagasságoknál illetve frekvenciáknál nem fordulnak elő. Ezen esetekben vagy nincs az instabilitásnak elég helye előállni, vagy ΔU sebességkülönbség nem elég nagy ahhoz, hogy az egyik vízfelület felkorbácsolja a másikat. Fontos észrevétel, hogy túl nagy frekvencia és H_0 esetén sem áll elő sokszögörvény. Ilyenkor a forma jobban hasonlít egy körre az edényben. Ez esetben túl nagy f -nél a hullámok hullámhosszai annyira kicsik, hogy vagy nem erősödnek föl, vagy pedig nem különíthetők el annyira, hogy egyértelműen meghatározható legyen a sokszög. Túl nagy kezdősebességnél pedig nagyon gyors forgatásra van szükség ahhoz, hogy a víznek kellőképpen nagy sebessége legyen ahhoz, hogy az instabilitás végbemehessen.

Látható, hogy csak nagyobb frekvenciáknál és nagyobb vízmagasságoknál fordulnak elő na-



11. ábra. Általunk mért fázisdiagramok. A két grafikon különböző átmérőjű edényekkel készült. a) $D = 14$ cm. b) $D = 27$ cm. A grafikonon a pontok jelölnék 1-1 mérést. A besatírozott háttér azt a célt szolgálja, hogy jobban láthatóak és elkülöníthetőek legyenek a különböző szögszámú sokszögeknek a helyei –, azaz azok a beállítások, melyeknél létrejönnek. b) grafikon azért nincs befejezve, mivel a kísérletben használt motor nem bizonyult elég erősnek ahhoz, hogy konzisztensen pörgesse a nagyobb víztömeget is. (A korábban bemutatott négyszögek azért nem szerepelnek a grafikonon, mert más átmérőjű edénnyel készültek.)

gyobb sokszögszámok. Ez a tény is visszavezethető a korábban leírtakra. Magas vízmagasságoknál elég vastag a határréteg ahhoz, hogy akár nagyobb hullámhosszú hullámok is felerősödjenek, ugyanakkor ehhez erősebb forgatás szükséges.

Eddigi méréseinkből következtethetünk arra, mi lenne az ideális beállítás a legnagyobb sokszögszámhoz. Használjunk minél nagyobb edényt, melybe minél több vizet töltünk. Ehhez viszont szükség van egy nagyon erős motorra, hogy kellően gyorsan tudjuk forgatni.

Érdekes kérdés, hogy a Szaturnusz hatszögének a milyenségére reprezentatívak-e a méréseinkből kinyert adatok. A Szaturnusz természetesen nagyságrendekkel nagyobb, mint a mi edényünk, viszont a forgási frekvenciája nagyságrendekkel kisebb. Elképzelhető, hogy ez a két effektus pont kiejti egymást, így kaphatunk a Szaturnuszon egy hatszöget.

5. Kvantitatív elmélet

A jelenség rendkívül komplex, így nehéz a jelenséget még kellően pontosan leíró, de egyszerű elméletet létrehozni. Egyértelmű, hogy a rendszerben turbulens áramlások folynak, melyeknek diszkutálása nehéz, és szinte biztos, hogy mozgásegyenletnek analitikus megoldása nincsen. Szimulációk készítése a Navier-Stokes egyenleteket alapul véve elképzelhető, ugyanakkor ez rendkívül nehéz lenne, illetve feltehetőleg nem szolgálna olyan eredményekkel, melyek a jelenség még mélyebb megértését segítenék elő. Ennek ellenére megpróbáltunk szimulációkat létrehozni. A Wigner Fizikai Kutatóközpont GPU laborjában kaptunk gépidőt [9]. Sajnos nem nyertünk ki értékelhető eredményt. Amely szimulációk lefordultak, azoknál a mesh felbontás túl kicsi volt ahhoz, hogy előálljon a jelenség, míg sűrűbb felosztásokat már nem tudtunk kiszámolni. Így úgy döntöttünk, hogy megkísérünk egy egyszerűbb, de még a jelenségre jellemző elméletet találni, melyet a méréseinkkel képesek vagyunk ellenőrizni.

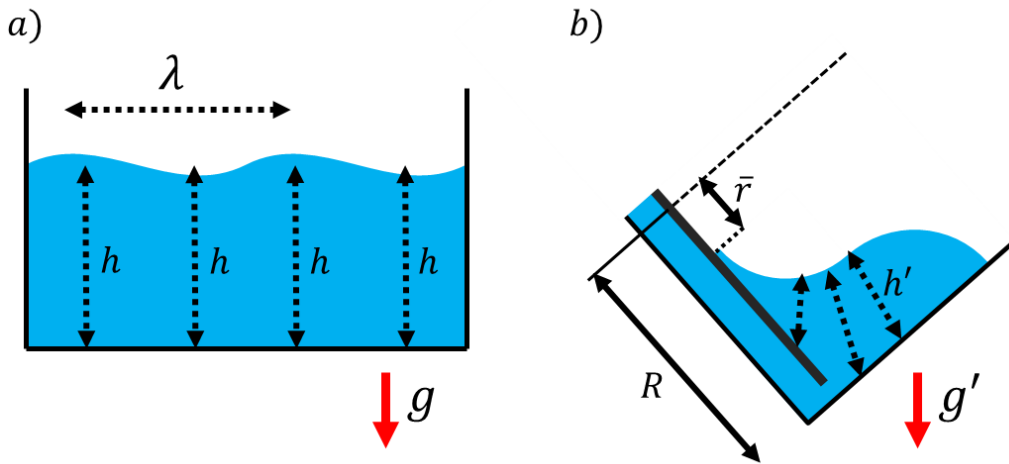
5.1. Vízfelszíni hullámok

Elméletünk alapjául a vízfelszíni hullámok diszperziós relációját vesszük.

$$f_{\text{hullám}} = \sqrt{\frac{g}{2\pi} \frac{1}{\lambda} \tanh\left(2\pi \frac{h}{\lambda}\right)}, \quad (4)$$

ahol $f_{\text{hullám}}$ a hullám frekvenciája, λ a hullámhossza és h a víz mélysége, melyet egyenletesnek feltételezünk. Az egyenlet a lineáris, azaz kis amplitúdójú hullámokra ad precíz eredményt, melyekre igaz, hogy A amplitúdójuk a vízmélységhez képest elhanyagolható ($h \ll A$). Előre bocsátjuk, hogy ez a közelítés az általunk vizsgált esetben nem teljesül, mégis általános tapasztalat, hogy a (4)-hez hasonló közelítések nagyon gyakran hasznos nagyságrendi becsléseket szolgáltatnak olyan esetekben is, melyre a linearitás feltételei nem teljesülnek.

Ez az egyenlet tehát egy diszperziós reláció, azaz a vízfelszíni hullámok frekvenciája, hullámhossza és a víz mélysége közötti összefüggést mutatja. Azt kívánjuk megvizsgálni, hogy a forgó aljzati koronghoz képest is lassú körbeheladó mozgást végző sokszögörvények tekinthetők-e egy ilyen összefüggéssel közelítőleg jellemezhető szabadfelszíni víz hullámok egy speciális esetének, a koronggal együttforgó rendszerből vizsgálva.



12. ábra. A „döntött világ” ábrázolása. a) felszíni hullámok egy egyszerű kád esetében. b) felszíni hullámok a sokszögörvények esetében. Látható, hogy b) esetben h' pontos megadása nem lehetséges.

A 12. ábrán látható, hogy melyek a lényegi különbségek egy „kád” és a kísérleti elrendezésünk között. Míg az egyszerű előbbi esetben (12.a) a hullámok a gravitációs térben mozognak, addig a sokszögörvényeknél, a koronggal együtt forgó rendszerben a vízre a centrifugális és gravitációs gyorsulás eredője hat, azaz számottevő sugárirányú komponenssel rendelkezik (12.b). Ezért érdekesebb az utóbbira úgy tekinteni, mintha egy „döntött világban” lennénk, ahol g' az effektív gravitációs gyorsulás nagysága

$$g' = \sqrt{a_{\text{cf}}^2 + g^2}, \quad (5)$$

ahol a_{cf} az együttforgó rendszerben a centrifugális gyorsulás.

Az így kapott „döntött”, g' -vel jellemzett rendszerben írjuk fel a (4) egyenletet:

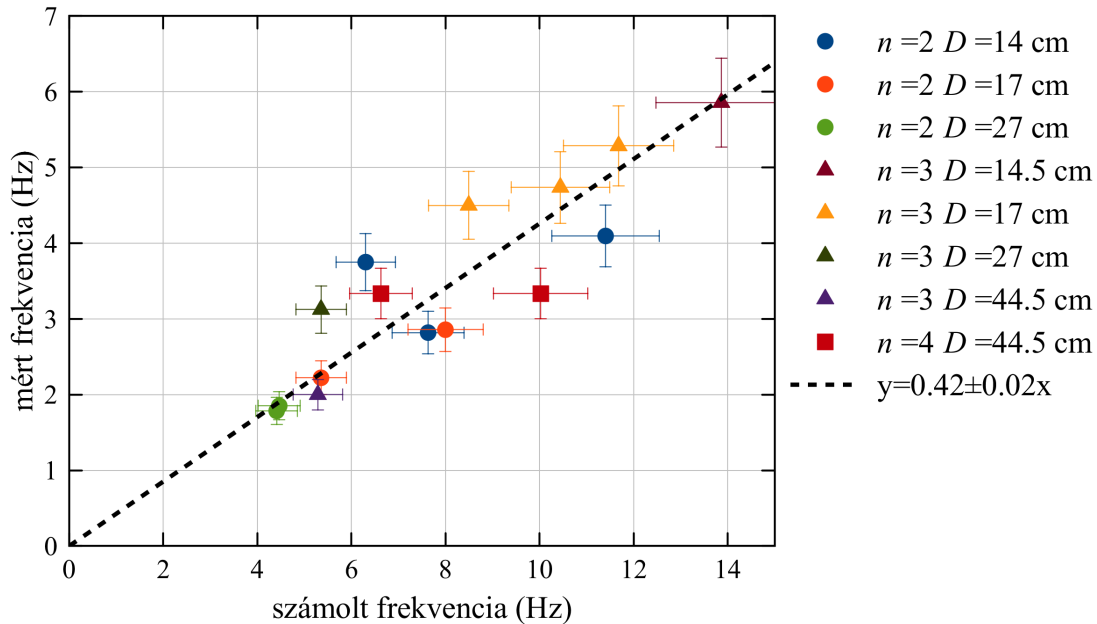
$$f_{\text{hullam}} = \sqrt{\frac{g'}{2\pi} \frac{1}{\lambda} \tanh\left(2\pi \frac{h'}{\lambda}\right)}. \quad (6)$$

Itt f_{hullam} a hullámfrekvencia az együttforgó rendszerből tekintve. (A laborrendszerből nézve ennek értéke Doppler-eltolódást szenved.) Mivel a hullámterjedés egy periodikus határfeltétellel jellemzett elrendezésben könnyen félreértésekre vezethet, fontos hangsúlyozni, hogy f_{hullam} nem azonos a teljes sokszög-alakzat – aljzattal együttforgó rendszerből mért – T körbefordulási idejének reciprokával. Ehelyett az $f_{\text{hullam}} = n/T$ összefüggés érvényes, ahol az n „hullámszám” a sokszögszerű alakzat csúcsainak száma.

Az említett Doppler-eltolódást úgy korrigáltuk, hogy a laborrendszerben rögzített kamerákkal készített videófelvetelek alapján meghatároztuk az alakzat T_{lab} inerciarendszerbeli körbeérési idejét, s az ennek megfelelő $f_{\text{lab}} = n/T_{\text{lab}}$ hullámfrekvenciát, majd képeztük ennek és a forgó korong ismert f_0 frekvenciájának különbségét: $f_{\text{hullam}} = f_{\text{lab}} - f_0$.

A 6. egyenletben szereplő λ értéknek a sokszögek \bar{r} átlagos kontaktsugáránál (vagyis a korongon levő nedves-száraz határgörbe átlagos sugárirányú távolságánál) felvett oldalhosszát tekintettük: $\lambda = 2\bar{r}\pi/n$. Végül a h' az „effektív vízmélység” is közelítést igényelt, hiszen szemben a 12.a) ábra klasszikus geometriájával, a „döntött világban” nem beszélhetünk konstans vízmélységről, hanem egy meglehetősen komplex „aljzati domborzatról” (12.b) ábra). Mivel tehát h' -nek nem adható konkrét konstans érték, ezért ehhez egy nagyságrendi becslést rendelünk: $h' \approx R - \bar{r}$, vagyis a tartály (korong) sugarának és az átlagos kontaktsugárának különbségét.

Így lehetővé vált egyes ismert, mérhető vagy közelíthető paraméterek (h' , λ , g') alapján jóslatot tenni az f_{hullam} értékre, s ezt összevetni a (függetlenül mért) hullámfrekvencia-értékekkel. Ezzel ellenőrizhettük, hogy mennyiben konzisztens az elméleti keretünk, melyben a sokszögörvényeket a szabadfelszíni víz hullámok egy speciális esetének tekintjük.



13. ábra. Összehasonlítás a mérési eredmények és a számolt hullámfrekvenciák között.

A számított és mért hullámfrekvencia-értékek összevetését a 13. ábrán mutatjuk be. Ahhoz, hogy lássuk, hogy az elmélet jól jellemzi-e a jelenséget, paramétereiben nagyon különböző

mérési pontokat használtunk. Megállapíthatjuk, hogy annak ellenére, hogy a hullámok amplitúdója a h' „vízmélységhez” képest egyáltalán nem elhanyagolható, ráadásul h' maga is csak nagyságrendileg becsülhető, az adatpontok még így is egy egyenes körül szóródnak, melynek meredeksége illesztésből 0.42 ± 0.02 -nek adódott.

Ezt az eredményt egy erős jelnek tartjuk, mely arra utal, hogy a sokszögörvények olyan hullámalakzatok, melyeket nyírási instabilitás gerjeszt, de lényegében szabadfelszíni vízhullámok módjára haladnak körbe-körbe a rendszerben. A periodikus határfeltétel miatt azok a hullámalakzatok tudnak hosszú távon megmaradni, melyekre igaz, hogy hullámhosszuk egész számszor fér föl a kontaktfelületre, ám a sokszögörvények *mégsem állóhullámok*: nem található olyan forgó rendszer, melyhez képest fix csomópontokkal jellemzett pulzálást mutatnának.

6. További érdekes jelenségek, megközelítések

Vizsgálataink során felmerültek további elméleti megközelítési lehetőségek, és érdekes járulékos jelenségekkel is találkoztunk, melyeket itt röviden megemlítünk. Érdekes lehet ezekkel kapcsolatban további kutatásokat folytatni, hiszen ezek vizsgálata tovább mélyítheti ismereteinket a sokszögörvényekkel és más hasonló jelenségekkel kapcsolatban.

6.1. Falak forgatása

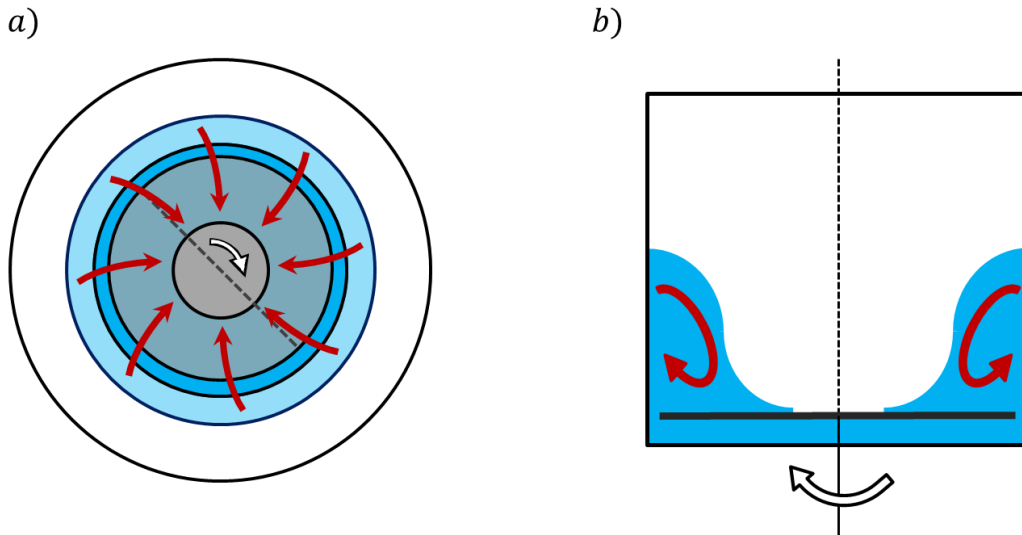
Érdekes kérdés, hogy mi történhet abban az esetben, ha nem (csak) az alsó tányér forog, hanem az edény falai is. Bár ezzel mi nem kísérleteztünk, feltevésünk, hogy nagyon hasonló jelenséget láthatnánk, hiszen a nyírási instabilitás továbbra is fennálna, bár a határ máshol helyezkedne el, és valószínűleg a határréteg δ vastagsága is változna. Ezzel a kérdéssel [3]-es cikk részletesen foglalkozik.

Felmerülhet a kérdés, hogy ugyanaz a jelenség megy-e végbe, ha nem az alsó tányért forgatjuk f frekvenciával, hanem a falat, miközben az aljzat a laborbeli (inercia-) rendszerhez viszonyítva áll. Úgy gondoljuk, hogy ebben az esetben, bár elképzelhető, hogy sokszögörvényeket láthatnánk, maga a nyírási instabilitás más helyen történne, hiszen δ máshol (és valószínűleg más szögben) helyezkedne el. A kérdés tisztázására további kísérleteket tervezünk végrehajtani.

6.2. Áramlások felbontása

A sokszögörvények bonyolult áramlási rendszerek, melyek részben turbulens, részben lamináris jellegű részjelenségekből állnak össze. Megfigyeléseink során ki lehetett venni laminárisnak tűnő másodlagos áramlásokat, illetve több felvételen úgy tűnik, hogy kicsiny vízfelszíni kapilláris hullámok is megjelennek a nagyléptékű sokszögalakzatok mellett. Elképzelhető tehát, hogy a sokszögörvény felbontható másodlagos áramlásokra, melyek egyenként laminárisnak tekinthetők. Ezt a felbontást a 14. ábrán jelenítjük meg. A feltételezést, hogy ilyen felbontást lehetséges végrehajtani, alátámasztja a 7. ábra, melyen hasonló másodlagos áramlásokat látunk, mint 14.a)-n. Egy ehhez hasonló felbontás segítségével elképzelhető egy egyszerűbb modell megalkotása a jelenségről. Ennek pontos vizsgálatához szükség lenne a rendszer vektormezőjének feltérképezéséhez, mely egy ilyen elrendezésben kifejezetten nehéz. (Hasonló mérések végzésével próbálkoztak a [2] munkában.)

A sebességmező felvétele azért is kulcsfontosságú lenne, mert az áramlás részecskepályavonalainak jellege szolgáltatna döntő bizonyítékot arra nézve, hogy a megfigyelt jelenség (a koronggal együttforgó rendszerből vizsgálva) valóban klasszikus hullámterjedés-e, vagyis egy olyan folyamat, mely még nagy amplitúdók esetén sem jár együtt számottevő anyagtranszporttal, csupán a folyadékelemek jórészt körkörös, helyhez kötött mozgásával. A Kármán Laboratóriumban ugyan rendelkezésre áll lézeres PIV (Particle Image Velocimetry) technika, melyet



14. ábra. Áramlások felbontása. *a)*-n felülnézetből olyan áramlásokat látunk, melyek a tányér forgatásával megegyező irányban örvénylenek ferdén befelé. *b)*-n az edény metszetét látjuk. Így felül kívülről befelé, alul belülről kifelé áramlik a víz. Ennek oka, hogy míg az edény aljánál a víz kifelé tolódik a centrifugális hatás miatt, az feltorlódik, és kénytelen felül visszaáramlani.

kifejezetten ilyen vizsgálatokhoz fejlesztettek ki, ám ebben az elrendezésben a gyors forgás és a bonyolult felszíni alakzat fénytörési viszonyai miatt ennek sikeres alkalmazása egyelőre sajnos szinte kivitelezhetetlen feladatnak tűnik.

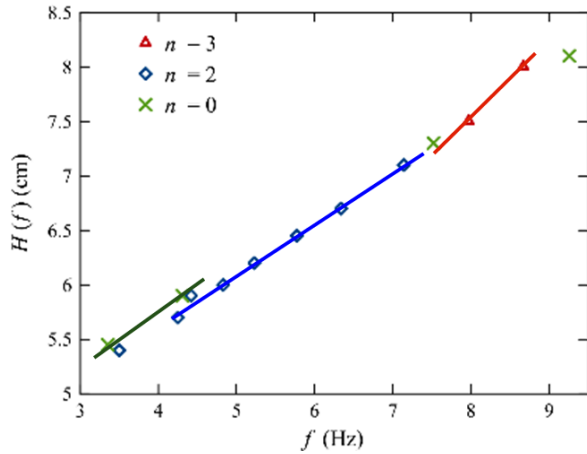
6.3. A jelenség energetikai vizsgálata

Fontos kérdés, hogy energetikai szempontból mi történik a rendszerben. Így tekintve, a forgatással folyamatosan energiát adunk át a rendszernek. Ez először is megforgatja a vizet, ami elkezdti ezt leadni súrlódás során felszabaduló hő formájában. Viszont ez a folyamat lassú, ezért a víz a falhoz közel feltorlódik, megnövelve potenciális energiáját. Kérdés, hogy az, hogy az örvény felveszi a sokszögformát, az leköt-e energiát. Hiszen ha ez igaz lenne, ez egy újabb magyarázatot adna a sokszögörvények létezésére.

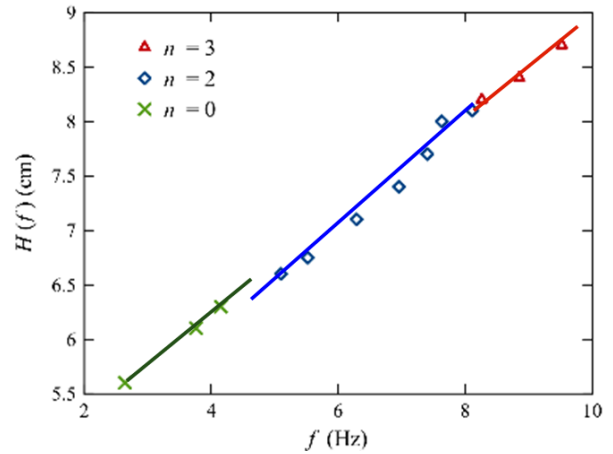
A 15. ábrán megjelenítjük a víz magasságát a fal mentén (H) a forgatás frekvenciájának függvényében. Amennyiben nagyobb szögszámú sokszög formájának a megtartása energiát köt le, akkor amikor fellépünk n -ről $n + 1$ -re, H -nak csökkennie kéne. Erre a grafikonokon egy kis tendencia látható, de nem tekinthetjük ezt teljes bizonyításnak. Hasonló eredményre jutott [3] irodalom.

Mindenesetre érdekes felvetés, hogy instabilitásoknál egy komplex forma megtartása energiát köthet le. Ebben az értelemben gyakorlatilag az energiaminimumra való törekvés okozhatja a sokszögörvények kialakulását.

a)



b)



15. ábra. a) $H_0 = 4.5$ cm. b) $H_0 = 5$ cm. Mindkét grafikon $D = 14$ cm átmérőjű edénnyel készült.

6.4. Vacillációk

Ha bizonyos kezdőfeltételekkel n sokszögszámot kapunk, és a kezdőfeltételekkel közelítünk egy $n+1$ vagy $n-1$ sokszögszámú örvényt előidéző feltételekhez, akkor előfordulhat, hogy a rendszer vacillál a két állapot között. Ekkor a rendszer kb. 10 másodperces periódusidővel váltakozik két sokszögszám között. Mi esetünkben egy ellipszis és egy kör váltakozott. Ez a jelenség ritka, ebből arra következtethetünk, hogy a sáv, amelyben ez előfordul, rendkívül szűk, így a legtöbb határon nem tudtuk előidézni. Mindenesetre rendkívül érdekes, hogy ilyen komplex jelenségek is előállnak egy fizikailag ilyen egyszerű rendszerben.

Ezt a jelenséget magyarázhatja a 6.3. alfejezetben diszkutált energetikai vizsgálat. Ez alapján a rendszer áttérne a több energiát lekötő formába, ugyanakkor ahhoz, hogy ezt a lépést megtegye, nincs elég energiája, így a nagyobb szögszámú forma nem stabil. Emiatt visszatér az eredeti n számú sokszögbe.

7. Összefoglalás

Munkánkban a vízfelszíni sokszögörvények kialakulását vizsgáltuk egy forgatott aljzatú, de statikus falú hengeres edényben. Ezeket az „örvényeket” a fal közelében ébredő nyírési instabilitás hozza létre. Laboratóriumi kísérleteinkben sikerült valóban reprodukálnunk ezeket az irodalomból ismert alakzatokat, és méréseket végeztünk jellegük, körbefordulási sebességük és hullámszámuk paraméterfüggésének vizsgálatára. Kvantitatív elméletünkkel amellet érvelünk, hogy ezen jelenségekre valójában nem is mint klasszikus örvényekre, hanem mint a felületi nehézségi vízhullámok egy speciális esetére érdemes tekintenünk. Vizsgálataink arra utalnak, hogy a körbeháladó alakzatok frekvenciája valóban hasonlóan skálázik a változtatható paraméterekkel, mint ahogy a nehézségi felületi vízhullámok módosított diszperziós relációjából következik. Annak pontos igazolásához, hogy itt valóban hullámterjedés (és nem elsősorban anyagtranszport) zajlik, az áramlás belső sebességterének feltérképezésére volna szükség. Ez ebben az elrendezésben technikailag nehezen kivitelezhető, így a kérdés minden kétséget kizáró megválaszolása egyelőre még várat magára.

Hivatkozások

- [1] JANSSON, THOMAS R. N.; HASPANG, MARTIN P.; JENSEN, KÅRE H.; HERSEN, PASCAL; BOHR, TOMAS. 2006 *Polygons on a Rotating Fluid Surface*. Physical Review Letters 96, 174502.
- [2] R. BERGMANN, L. TOPHØJ, T. A. M. HOMAN, P. HERSEN, A. ANDERSEN, & T. BOHR. 2011 *Polygon formation and surface flow on a rotatin fluid surface*. J. Fluid Mech. 679, 415–431.
- [3] B.BACH, E. C.LINNARTZ, M. H. VESTED, A. ANDERSEN AND T. BOHR. 2014 *From Newton's bucket to rotating polygons: experiments on surface instabilities inswirling flows*. J. Fluid Mech. 386-403.
- [4] G. H. VATISTAS. *A classical flow instability and its connection to gaseous galactic disk hydrodynamics*.
- [5] J. M. LOPEZ, F. MARQUES, A. H. HIRSA AND R. MIRAGHAIE. 2004 *Symmetry breaking in free-surface cylinder flows*. J. Fluid Mech. 502, 99-126.
- [6] J.P. KOSSIN, W. H. SCHUBERT. 2001 *Mesovortices, polygonal flow patterns, and rapid pressure falls in hurricane-like vortices*. Journal of the atmospheric sciences, 58(15), 2196-2209.
- [7] BUDÓ ÁGOSTON 1965 *Mechanika* Tankönyvkiadó, Budapest
- [8] CARL E. MUNGAN, TREVOR C. LIPSCOMBE. 2013 *Newton's Rotating Water Bucket: A Simple Model*. Washington Academy of Sciences. 15-24.
- [9] <http://gpu.wigner.hu>